Лекция 15. МКЭ. Решение системы уравнений. Общая блок-схема вычислений

Одним из самых эффективных методов решения систем линейных уравнений, которые получаются при использовании МКЭ, является метод Гаусса. Матрица системы преобразуется в треугольную, а затем решение получают с помощью обратной прогонки. Покажем это на простом примере, а затем обобщим на систему с большим кол-вом уравнений и неизвестных.

Рассмотрим систему с тремя неизвестными

$$\begin{aligned} 8\Phi_1 + 2\Phi_2 + \Phi_3 &= 6, \\ 2\Phi_1 + 6\Phi_2 - \Phi_3 &= 4, \\ \Phi_1 - \Phi_2 + 4\Phi_3 &= 2. \end{aligned}$$

Матрица системы симметрична, а наибольшие коэффициенты располагаются на главной диагонали. Метод исключения состоит в том, что любая неизвестная может быть исключена из всех уравнений системы, кроме того, в котором она располагается на главной диагонали. Так, неизвестную Φ_1 исключают из второго и третьего уравнений. Для этого разрешим первое уравнение относительно Φ_1.

$$\Phi_1 = 0{,}75 - 0{,}25\Phi_2 - 0{,}125\Phi_3.$$

Далее подставим выражение во второе и третье уравнения

$$2(0{,}75 - 0{,}25\Phi_2 - 0{,}125\Phi_3) + 6\Phi_2 - \Phi_3 = 4,$$

$$5{,}5\Phi_2 - 1{,}25\Phi_3 = 2{,}5.$$

$$(0{,}75 - 0{,}25\Phi_2 \quad 0{,}125\Phi_3) - \Phi_2 + 4\Phi_3 = 2,$$

$$-\ 1{,}25\Phi_2 + 3{,}875\Phi_3 = 1{,}25.$$

Тогда система принимает следующий вид

$$\begin{aligned} 8\Phi_1 + 2\Phi_2 \quad + \Phi_3 \quad &= 6, \\ 5{,}5\Phi_2 \quad - 1{,}25\Phi_3 \quad &= 2{,}5, \\ -1{,}25\Phi_2 + 3{,}875\Phi_3 &= 1{,}25. \end{aligned}$$

Повторяем процедуру исключения для второй неизвестной и третьего уравнения

$$\begin{aligned} 8\Phi_1 + 2\Phi_2 \quad + \Phi_3 \quad &= 6, \\ 5{,}5\Phi_2 - 1{,}25\Phi_3 \quad &= 2{,}5, \\ 3{,}591\Phi_3 &= 1{,}818. \end{aligned}$$

Полученная система решается обратной прогонкой: сначала из третьего уравнения находят третью неизвестную, затем из второго вторую и первую подстановкой в первое уравнение найденных значений третьей и второй неизвестных.

Таким образом, метод решения системы линейных уравнений состоит из двух этапов: разложение матрицы и обратная прогонка.

Теперь рассмотрим более общую систему. Будем предполагать, что она симметрична и большие члены находятся на главной диагонали. Будем считать, что матрица системы имеет ленточный тип.

$$
\begin{aligned}
&K_{11}\Phi_1+K_{12}\Phi_2+K_{13}\Phi_3 &&=F_1,\\
&K_{21}\Phi_1+K_{22}\Phi_2+K_{23}\Phi_3+K_{24}\Phi_4 &&=F_2,\\
&K_{31}\Phi_1+K_{32}\Phi_2+K_{33}\Phi_3+K_{34}\Phi_4+K_{35}\Phi_5 &&=F_3,\\
&\qquad\quad K_{42}\Phi_2+K_{43}\Phi_3+K_{44}\Phi_4+K_{45}\Phi_5 &&=F_4,\\
&\qquad\qquad\qquad K_{53}\Phi_3+K_{54}\Phi_4+K_{55}\Phi_5 &&=F_5.
\end{aligned}
$$

Очевидно, что ширина полосы матрицы равна трем, здесь не показаны нулевые коэффициенты. После исключения первой переменной, получаем

$$
\begin{bmatrix}
K_{11} & K_{12} & K_{13} & 0 & 0 & F_1\\
0 & K_{22}^{(1)} & K_{23}^{(1)} & K_{24}^{(1)} & 0 & F_2^{(1)}\\
0 & K_{32}^{(1)} & K_{33}^{(1)} & K_{34}^{(1)} & K_{35}^{(1)} & F_3^{(1)}\\
0 & K_{42}^{(1)} & K_{43}^{(1)} & K_{44}^{(1)} & K_{45}^{(1)} & F_4^{(1)}\\
0 & 0 & K_{53}^{(1)} & K_{54}^{(1)} & K_{55}^{(1)} & F_5^{(1)}
\end{bmatrix},
$$

где коэффициенты выражаются в соответствии со следующими выражениями

$$
K_{22}^{(1)}=K_{22}-K_{21}\frac{K_{12}}{K_{11}}, \qquad K_{23}^{(1)}=K_{23}-K_{21}\frac{K_{13}}{K_{11}},
$$

$$
K_{32}^{(1)}=K_{32}-K_{31}\frac{K_{12}}{K_{11}}, \qquad K_{33}^{(1)}=K_{33}-K_{31}\frac{K_{13}}{K_{11}},
$$

$$
F_2^{(1)}=F_2-K_{21}\frac{F_1}{K_{11}}, \qquad F_3^{(1)}=F_3-K_{31}\frac{F_1}{K_{11}}.
$$

Верхний индекс (1) применяется для обозначения первого исключения. Запишем общее соотношение для любого коэффициента после осуществления первой редукции (исключения)

$$
K_{ij}^{(1)}=K_{ij}-K_{i1}\frac{K_{1j}}{K_{11}}, \quad i,\ j>1
$$

Если рассмотреть редукцию с номером *n*, то получим соотношения следующего вида

$$
K_{ij}^{(n)}=K_{ij}^{(n-1)}-K_{in}^{(n-1)}\frac{K_{nj}^{(n-1)}}{K_{nn}^{(n-1)}}, \quad i,j>n.
$$

Для вектор-столбца *F* получим следующие выражения

$$
F_i^{(1)}=F_i-K_{i1}\frac{F_1}{K_{11}}, \quad i>1,
$$

$$
F_i^{(n)}=F_i^{(n-1)}-K_{in}^{(n-1)}\frac{F_n^{(n-1)}}{K_{nn}^{(n-1)}}, \quad i>n
$$

Эти соотношения дают нам важный вывод: симметрия коэффициентов после выполнения исключений сохраняется. Это легко показать, если принять в рассмотрение коэффициенты $K_{23}^{(1)}$ и $K_{32}^{(1)}$. Так как в исходной системе $K_{12} = K_{21}$, $K_{13} = K_{31}$, то $K_{23}^{(1)} = K_{32}^{(1)}$.

Симметрия матрицы сохраняется после каждого исключения, следовательно, можно переписать матрицу в следующем виде

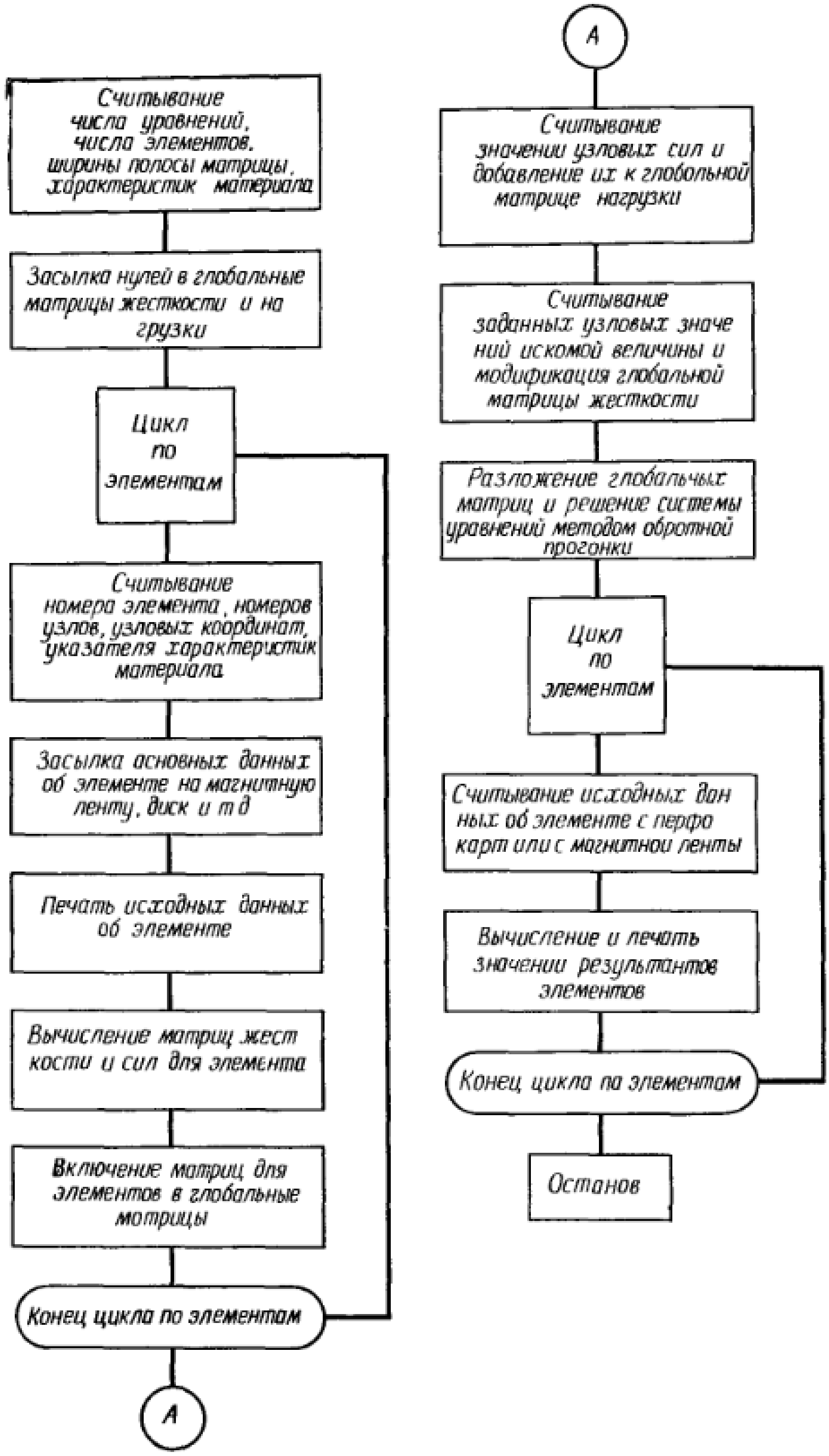
$$K_{ij}^{(n)} = K_{ij}^{(n-1)} - K_{nj}^{(n-1)} \frac{K_{nj}^{(n-1)}}{K_{nn}^{(n-1)}}.$$

Таким образом, нет смысла запоминать элементы, которые находятся под главной диагональю. Для выполнения операций нужны только элементы на и над главной диагональю.

Более того, коэффициенты, которые находятся вне полосы, запоминать не надо, так как они все равны нулю. Это дает возможность хранить глобальную матрицу жесткости в виде прямоугольной таблицы, шириной, которая равна ширине полосы глобальной матрицы.

Общая блок-схема вычислений

Основное преимущество МКЭ состоит в том, что его этапы являются общими для всех областей его применения. На следующем рисунке представлена общая блок-схема вычислений. Представленная блок-схема предназначается для симплекс-элементов. Рассмотрим работу блок-схемы для общего случая, а не на каком-то частном примере.


Считывание числа уравнений, числа элементов, ширины полосы матрицы, характеристик материала
Засылка нулей в глобальные матрицы жесткости и нагрузки
Цикл по элементам
Считывание номера элемента, номеров узлов, узловых координат, указателя характеристик материала
Засылка основных данных об элементе на магнитную ленту, диск и т д
Печать исходных данных об элементе
Вычисление матриц жесткости и сил для элемента
Включение матриц для элементов в глобальные матрицы
Конец цикла по элементам
A
A
Считывание значений узловых сил и добавление их к глобальной матрице нагрузки
Считывание заданных узловых значений искомой величины и модификация глобальной матрицы жесткости
Разложение глобальных матриц и решение системы уравнений методом обратной прогонки
Цикл по элементам
Считывание исходных данных об элементе с перфокарт или с магнитной ленты
Вычисление и печать значений результантов элементов
Конец цикла по элементам
Останов