Лекция 8. МКЭ. Повторное решение задачи о переносе тепла в стержне.

В прошлой лекции мы показали, что процедура минимизации функционала приводит в результате к системе алгебраических уравнений. Решаю эту систему, мы получаем искомые узловые значения температуры. Однако, процедура минимизации в том виде, в котором она была представлена нами, нелегко реализуется на ЭВМ. Но есть другой способ, который более удобен для реализации на компьютере. Он состоит в том, что величина χ разбивается на слагаемые, соответствующие элементам. Эти слагаемые минимизируются до того, как считаются интегралы. В результате этого мы получаем интегралы, которые и вычисляем по элементам.

Запишем χ в виде суммы двух слагаемых

$$\chi = \chi^{(1)} + \chi^{(2)},$$

где $\chi^{(1)}$ – интегралы для первого элементы, $\chi^{(2)}$ – интегралы для второго элемента.

$$\chi^{(1)} = \int\limits_{V^{(1)}} \frac{C^{(1)}}{2A^{(1)}L^{(1)}}\left(-T_1 + T_2\right)^2 dV + \int\limits_{S^{(1)}} qT_1 dS,$$

$$\chi^{(2)} = \int\limits_{V^{(2)}} \frac{C^{(2)}}{2A^{(2)}L^{(2)}}\left(-T_2 + T_3\right)^2 dV + \int\limits_{S^{(2)}} \frac{h}{2}\left(T_3 - T_\infty\right)^2 dS,$$

где $C^{(1)} = \dfrac{A^{(1)}K_{xx}^{(1)}}{L^{(1)}}$, $C^{(2)} = \dfrac{A^{(2)}K_{xx}^{(2)}}{L^{(2)}}$.

Теперь продифференцируем каждую компоненту χ по узловым значениям T_1, T_2, T_3.

$$\frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial T_1} = \int\limits_{V^{(1)}} \frac{C^{(1)}}{A^{(1)}L^{(1)}}\left(-T_1 + T_2\right)(-1)dV + \int\limits_{S^{(1)}} q dS,$$

$$\frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial T_2} = \int\limits_{V^{(1)}} \frac{C^{(1)}}{A^{(1)}L^{(1)}}\left(-T_1 + T_2\right)dV$$

$$\frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial T_3} = 0.$$

Если в записанных выше соотношениях вычислить интегралы, то получим

$$\frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial \{T\}} = \begin{bmatrix} C^{(1)} & -C^{(1)} & 0 \\ -C^{(1)} & C^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} qA_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Для второй компоненты получаем следующие производные

$$\frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial T_1} = 0,$$

$$\frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial T_2} = \int\limits_{V^{(2)}} \frac{C^{(2)}}{A^{(2)}L^{(2)}}\left(-T_2 + T_3\right)(-1)dV,$$

$$\frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial T_3} = \int\limits_{V^{(2)}} \frac{C^{(2)}}{A^{(2)}L^{(2)}}\left(-T_2 + T_3\right)dV + \int\limits_{S^{(2)}} h\left(T_3 - T_\infty\right)dS.$$

Если вычислить интегралы, тогда

$$\frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial \{T\}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C^{(2)} & -C^{(2)} \\ 0 & -C^{(2)} & \left[C^{(2)} + hA_3\right] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -hA_3T_\infty \end{Bmatrix}.$$

Длят того чтобы функционал χ принимал минимальное значение необходимо, чтобы производные по узловым значениям равнялись нулю.

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{T\}} = \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial \{T\}} + \frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial \{T\}}.$$

Тогда получим искомые уравнения для определения T_1, T_2, T_3.

$$\begin{bmatrix} C^{(1)} & -C^{(1)} & 0 \\ -C^{(1)} & C^{(1)} + C^{(2)} & -C^{(2)} \\ 0 & -C^{(2)} & C^{(2)} + hA_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} qA_1 \\ 0 \\ -hA_3 T_\infty \end{Bmatrix} = 0.$$

В итоге мы получили ту же систему, которая была выведена в прошлой лекции. Данный подход удобен тем, что система уравнений для нахождения узловых значений может быть записана для отдельных элементов. А суммирование производных по элементам очень удобно для реализации на ЭВМ.